

Дубко В.О.

Таврійський національний університет імені В.І. Вернадського

ЗАСТОСУВАННЯ ІНДИКАТОРНИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ТА ДОСЛІДЖЕННІ ПОКАЗНИКІВ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗМІННОЮ СТРУКТУРОЮ

Ця робота є розширенням та продовженням наших досліджень, пов'язаних з використанням випадкових індикаторних процесів $\chi_l(t), l=1, (n-1), \chi_l(t) \in \{0,1\}$ при моделюванні динамічних систем з стрибкоподібною змінною структурою. В основу покладено можливість розкладу довільного n -компонентного процесу на «ортогональні» компоненти з використанням несумісних процесів, утворених за певним алгоритмом комбінацій $\chi_l(t)$. Було продемонстровано ефективність застосування індикаторних процесів при моделюванні явищ, які можна трактувати як їх еволюцію у випадковому середовищі, характеристики якого змінюються стрибками у випадкові моменти часу. Закон цих змін узгоджувався з законом Пуассона. Для моделі дворівневого стану системи, встановлено зв'язок з моделлю Каца, що використовувалась для опису одновимірного процесу блукання частинки з постійною за величиною швидкістю, але з зміною напрямку її руху у випадкові моменти часу. Досліджені моделі побудовані на основі стохастичних рівнянь Іто зі стрибкоподібними змінами коефіцієнтів, побудовані рівняння для характеристичних функцій та знайдено їх розв'язок. Спираючись на основні результати цих робіт, в даній статті детальніше розглянуто варіанти представлення індикаторних випадкових процесів, зосереджено увагу на процесах, пов'язаних з випадковими інтервалами часу перебування системи у певних можливих станах, розподілі показників системи, залежних від цих інтервалів. Як приклад такого показника, вибрано надійність багатоелементної системи, яка може перебувати у певному k -му стані, для якого відомий аналітичний вираз зміни її надійності в залежності від часу функціонування при фіксованих показниках k -го стану «зовнішнього середовища». У такій трактовці надійність системи вже є випадковою функцією від часу. Для дворівневого випадку встановлені явні вирази щільності розподілу випадкового часу та надійності, їх зв'язок з класичними розв'язками телеграфного рівняння. Вказано на особливості опису багаторівневих, багатоелементних систем, шляхи пошуку розподілів характеристик аналогічних тим, що були розглянуті в роботі для системи з двома можливими станами.

Ключові слова: індикаторні процеси, зовнішнє середовище, випадковий розподіл часу, надійність системи, процеси Пуассона, телеграфне рівняння.

Постановка проблеми. При побудові моделей реальних систем використовуються різні методи моделювання. Чим більший набір цих методів, тим більш широкий клас систем стає доступним для відображення та дослідження математичними методами. Так застосування методів і висновків класичної теорії стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) [3] з не випадковими коефіцієнтами, наприклад, не завжди дозволяє моделювати системи у випадковому середовищі (ВС). Вплив зміни стану ВС на реальну систему потребує розгляду і моделей з стрибкоподібною змінною коефіцієнтів у СДР (системи з змінною структурою). Змістовні результати вдається одержати і при запровадженні нових понять, додаткових математичних структур [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Існує безліч робіт присвячених функціонуванню систем у випадкових середовищах. Широкий огляд, перелік, класифікація та застосування таких моделей, виконано у [6]. Особливістю побудованих та розглянутих нами моделей, є використання несумісних випадкових індикаторних процесів при моделюванні стохастичних характеристик системи із стрибкоподібною змінною станів. У даній роботі, окрім того, що ми спираємось на наші попередні результати [1], [2], використовуємо і певні аналітичні результати та висновки з інших робіт [4], [5], на які посиляємось по мірі необхідності, при викладі основного матеріалу.

Постановка завдання. Метою цієї роботи є розвиток напрямку моделювання систем з змінною структурою, заснованого на використанні несумісних процесів, сформованих на основі набору індикаторних випадкових процесів [2], у тому числі, при знаходженні аналітичних розв'язків для розглянутих моделей. Ефективність такого напрямку була продемонстрована на прикладі стохастичних рівнянь Іто, в наших роботах [1-2]. Ця стаття є продовження досліджень у цьому напрямку, та пов'язана з демонстрацією запропонованого алгоритму в [2] при дослідженні стохастичних моделей показників системи, у котрих відбуваються випадкові зміни показників «середовища функціонування».

Виклад основного матеріалу. Основні положення, моделі та їх дослідження. Для визначеності, покладемо, що зміни стану системи, яку моделюємо, пов'язані з випадковими k станами «зовнішнього середовища» (ЗС), зміна яких відбувається у випадкові моменти часу за законом Пуассона. Будемо розглядати такі динамічні характеристики як час перебування системи та зміна її надійності для k -го стану ЗС. Систему розглядаємо як набір з k підсистем. Реакцію системи на зміну стану ЗС трактуємо як перехід до k -ї підсистеми, яка забезпечує роботу системи у цьому стані. Причому вважаємо, що зміна динамічних показників k -ї підсистеми відбувається лише в період її роботи.

Випадкові індикаторні процеси.

Наведемо деякі необхідні означення та властивості випадкових індикаторних процесів (ВІП) [2, с. 81].

Випадкові процеси $\chi_l(t), l = \overline{1, (n-1)}$ утворюють набір ВІП [2, с. 81], якщо кожен із них може приймати лише значення 1, з ймовірністю $p(\chi_l(t) = 1) = p_l(t)$, та 0, з ймовірністю $(1 - p_l(t))$.

Із визначення $\chi_l(t)$ слідує, що

$$(1 - \chi_l(t))\chi_l(t) = 0. \quad (1)$$

ВІП можна надати аналітичне представлення, наприклад таке: $\chi_l(t) = 2^{-1}[1 + \cos(\pi g_l(t))]$ – де $g_k(t)$ різні $\forall k$, цілочисельні, загалом, випадкові, процеси, які приймають обов'язково як парні, так і не парні значення.

Спираючись на $\chi_l(t), l = \overline{1, (n-1)}$, побудуємо послідовність процесів [2]:

$$y_1(t) = \chi_1(t), \dots, y_k(t) = \chi_k(t) \prod_{l=1}^{k-1} (1 - \chi_l(t)), \dots, \\ y_n(t) = \prod_{l=1}^{n-1} (1 - \chi_l(t)); \quad (2)$$

$y_k(t)$ приймають лише значення $\{0,1\}$. Тобто, $y_k(t)$ теж є випадковими індикаторними процесами, та, враховуючи властивість (1), утворюють набір несумісних, ортогональних процесів:

$$y_l(t)y_k(t) = 0, \forall l \neq k.$$

Крім того, як доведено в [2, с. 81, 82] (Лема 1, 2)

$$y_l^\nu(t) = y_l(t), \forall l, k = \overline{1, n}, \nu > 0 \forall a_l \chi_k(t),$$

$$\sum_{k=1}^n y_k(t) = 1. \quad (3)$$

Остання рівність в (3) може розглядатись як наслідок властивостей $y_k(t)$, або алгебраїчної рівності: $a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \prod_{l=1}^{k-1} (1 - a_l) + \prod_{l=1}^{n-1} (1 - a_l) = 1$, набору чисел.

Змінюючи порядок вибору при формуванні послідовностей типу (2), можемо побудувати $(n-1)!$ різних наборів ортогональних процесів. В подальшому, будемо розглядати послідовність в позначеннях (2).

Враховуючи (3), встановлюємо несумісності і таких процесів:

$$z_k(t) = f_k(t)y_k = f_k(t)\chi_k(t) \prod_{l=1}^{k-1} (1 - \chi_l(t)), z_n(t) = \\ = f_n(t)y_n = \prod_{l=1}^{n-1} (1 - \chi_l(t)) \\ z_k(t)z_{k'}(t) = \delta_{k,k'}, \forall t,$$

де $f_k(t), k = \overline{1, n}$ послідовності довільних процесів. (4) можна трактувати як $p(\chi_l(t) = 1) = p_l(t)$ розклад довільного процесу $F(t) = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\}$ по базису ортогональних процесів (2). Як відмічено у [2, с. 86], при заданому наборі $p(z_k(t))$ існує можливість визначити ймовірності, які фігурують в (1).

Розподіл часу знаходження системи у фіксованому стані.

Перейдемо до розгляду випадкових процесів

$$x_k(t) = \int_0^t y_k(\tau) d\tau, \quad (5)$$

$$\sum_{l=1}^n x_k(t) = \int_0^t d\tau \sum_{l=1}^n y_k(\tau) = t, \quad 0 \leq x_k(t) \leq t.$$

Як бачимо, $x_k(t)$ відповідає випадковому часу знаходження системи у стані $z_k(t)$ до поточного моменту спостереження t .

Далі будемо працювати з таким набором незалежних індикаторних процесів

$$\chi_k(t) = 2^{-1}[1 + \cos(N_k(t)\pi)], \quad (6)$$

де $N_k(t)$ – незалежні процеси Пуассона інтенсивності λ_k , $k = \overline{1, (n-1)}$.

Відповідні елементи в (2) набувають вигляду:

$$y_k(t) = \chi_k(t) \prod_{l=1}^{k-1} (1 - \chi_l(t)) = 2^{-k} [1 + \cos(N_k(t)\pi)] \prod_{l=1}^{k-1} [1 - \cos(N_l(t)\pi)]. \quad (7)$$

Властивості випадкових індикаторних функцій приводять до рівностей $\chi_k^v = \chi_k, \delta(\cdot)$ $y_k^v(t) = y_k(t), \forall v > 0$. Тому, за необхідності, достатньо знаходити лише рівняння для χ_k , та $y_k(t)$.

Приклад 1. Розглянемо дворівневу систему: $y_1(t) = \chi(t)$, $y_2(t) = 1 - \chi(t)$. Почнемо з встановлення щільності розподілу випадкового часу знаходження системи у стані $y_1(t)$.

З урахуванням (5), (6) та (7),

$$x_1(t) = \int_0^t y_1(\tau) d\tau = 2^{-1} \int_0^t [1 + \cos(N(\tau)\pi)] d\tau = 2^{-1} t + 2^{-1} \int_0^t \cos(N(\tau)\pi) d\tau. \quad (8)$$

Перейдемо до нових змінних:

$$x(t) = x_1(t) - 2^{-1} t = 2^{-1} \int_0^t [\cos(N(\tau)\pi)] d\tau. \quad (9)$$

Процес $x(t)$ часто ототожнюється у літературі з координатою частинки, що рухається з постійною за величиною швидкістю на лінії, і змінює напрямок свого руху в випадкові моменти часу [4], [5]. У нашому випадку «швидкість» $c = 2^{-1}$, а зміна напрямку визначається функцією $(-1)^{N(t)} = \cos(N(t)\pi)$. $N(t)$ – Пуассонівський процес інтенсивності λ .

Характеристична функція $\bar{I}_1(\beta, t)$ для $x_1(t)$, з урахуванням того, що t не є випадковою величиною, допускає представлення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x_1} \rho_1(x_1, t) dx_1 = \bar{I}_1(\beta, t) = e^{i\beta 2^{-1} t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x} \rho(x, t) dx \quad (10)$$

де $\rho(x, t)$ – щільність розподілу випадкового процесу (9), а $\rho_1(x_1, t)$ відповідає, випадковому процесу (8).

Виконаємо обернене перетворення для (10):

$$\begin{aligned} \rho_1(x_1, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta x_1} \bar{I}_1(\beta, t) d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x} e^{i\beta 2^{-1} t} e^{-i\beta x_1} d\beta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\beta[x_1 - x - 2^{-1} t]\} d\beta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) \delta([x - (x_1 - 2^{-1} t)]) dx = \rho(x_1 - 2^{-1} t, t) \end{aligned} \quad (11)$$

$\rho(x, t)$ – фундаментальний розв'язок телеграфного рівняння

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial t^2} + 2\lambda \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - 2^{-2} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} = 0 \\ \rho(x, 0) = \delta(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Розв'язок (12) наведений у багатьох роботах. Використаємо аналітичний вигляд розв'язку (12), наприклад, із роботи [5, стор. 142], адаптуючи його до наших позначень:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= e^{-\lambda t} 2^{-1} [\delta(2^{-1} t + x) + \delta(2^{-1} t - x) + \\ &+ e^{-\lambda t} \left[\lambda I_0 \left(2\lambda \sqrt{2^{-2} t^2 - x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} I_0 \left(2\lambda \sqrt{2^{-2} t^2 - x^2} \right) \right] \theta(2^{-1} t - |x|)]; \quad (13) \\ x &\in (-\infty, \infty), t > 0. \end{aligned}$$

де використанні позначення: $I_0(\cdot)$ – модифікована функція Бесселя нульового порядку, $\delta(\cdot)$ – дельта функція Дірака, а $\theta(\cdot)$ – одинична функція Хевісайда.

Повертаючись до (11) та врахувавши (5), отримуємо:

$$\begin{aligned} \rho_1(x_1, t) &= \rho(x_1 - 2^{-1} t, t) = \\ &= \frac{e^{-\lambda t}}{2} [\delta(x_1) + \delta(t - x_1) + e^{-\lambda t} \left[\lambda I_0 \left(2\lambda \sqrt{x_1(t - x_1)} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial t} I_0 \left(2\lambda \sqrt{x_1(t - x_1)} \right) \right] \times \theta(t - x)]; \quad x_1 \in (0, \infty), t > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Позначимо через $\rho_2(x_2, t)$ щільність розподілу для випадкового часу знаходження системи у другому стані:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_0^t (1 - \chi(\tau)) d\tau = 2^{-1} \int_0^t [1 - \cos(N(\tau)\pi)] d\tau = \\ &= 2^{-1} t - 2^{-1} \int_0^t [\cos(N(\tau)\pi)] d\tau, \end{aligned}$$

Перейдемо до нової змінної:

$$x(t) = 2^{-1} t - x_2(t) = 2^{-1} \int_0^t [\cos(N(\tau)\pi)] d\tau,$$

Бачимо, що знову можемо скористатись розв'язком рівняння (12), за тим же алгоритмом, як і при знаходженні $\rho_1(x_1, t)$. Повертаючись до початкових змінних, прийдемо до такого представлення $\rho_2(x_2, t)$:

$$\begin{aligned} \rho_2(x_2, t) &= e^{-\lambda t} 2^{-1} [\delta(t - x_2) + \delta(x_2) + \\ &+ e^{-\lambda t} \left[\lambda I_0 \left(2\lambda \sqrt{(t - x_2)x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} I_0 \left(2\lambda \sqrt{(t - x_2)x_2} \right) \right] \theta(t - x_2)]; \quad (15) \\ x_2 &\in (0, \infty), t > 0. \end{aligned}$$

Розподіл надійності.

Нехай

$$P(t) = \sum_{k=1}^n z_k(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t) P_k \left(\int_0^t y_k(\tau) d\tau \right), \quad (16)$$

де $P_k(t)$ відомі функції.Характеристична функції процесу $P(t)$ (16), з урахуванням (4), допускає представлення:

$$\begin{aligned} M[\exp\{i\beta P(t)\}] &= M[\exp\{i\beta \sum_{k=1}^n y_k(t) P_k \left(\int_0^t y_k(\tau) d\tau \right)\}] = \\ &= \sum_{k=1}^n M[y_k(t) \exp\{i\beta P_k \left(\int_0^t y_k(\tau) d\tau \right)\}]. \end{aligned} \quad (17)$$

У цьому можна впевнитись, скориставшись ортогональністю (4) процесів $z_k(t)$ та властивістю (3):

$$\begin{aligned} M[\exp\{i\beta \sum_{k=1}^n y_k(t) P_k \left(\int_0^t y_k(\tau) d\tau \right)\}] &= \\ &= \prod_{k=1}^n M[\exp\{i\beta y_k(t) P_k \left(\int_0^t y_k(\tau) d\tau \right)\}] = \\ &= M \left[\prod_{k=1}^n \left\{ 1 + y_k(t) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(i\beta P_k \left(\int_0^t y_k(\tau) d\tau \right))^j}{j!} \right\} \right] = \\ &= M \left[1 - \sum_{k=1}^n y_k(t) + y_k(t) \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\beta P_k \left(\int_0^t y_k(\tau) d\tau \right))^j}{j!} \right]. \end{aligned}$$

Тобто, є можливість розглядати (17) як суму доданків

$$I_k(t; \beta) = M[y_k(t) \exp\{i\beta P_k \left(\int_0^t y_k(\tau) d\tau \right)\}], \quad (18)$$

та знаходити рівняння для кожної компоненти (18), взаємозалежності між ними. Позначимо через $g_k(P, t)$ обернені перетворення (18). Тоді рівність (17) замінюється на таку:

$$\rho(P, t) = \sum_{k=1}^n g_k(P, t). \quad (19)$$

Прикладом $P_k(t)$ може бути ймовірність функціонування системи – надійність. В (17), (18) $P_k \left(\int_0^t y_k(\tau) d\tau \right)$ – вже випадкові процеси. Множник $y_k(t)$ можемо трактувати як модель зміни стану «зовнішнього середовища», яке впливає на вибір (включення) робочої підсистеми з характеристикою $P_k(\cdot)$.

Аналітичне представлення зміни надійності системи часто зустрічається у вигляді $P_k(t) = \exp(-\gamma_k t)$, $\gamma_k > 0$. При такому виборі, (18) набуває вигляду:

$$I_k(t; \beta) = M[y_k(t) \exp\{i\beta \exp\{-\gamma_k \int_0^t y_k(\tau) d\tau\}\}]. \quad (20)$$

Приклад 2. Обмежимося представленням (20). Для дворівневого стану системи ($y_1(t) = \chi(t)$, $y_2(t) = 1 - \chi(t)$), у силу рівності (19), щільність розподіл надійності системи матиме вигляд:

$$\rho(P, t) = g_1(P, t) + g_2(P, t), \quad (21)$$

де $g_1(P, t)$, $g_2(P, t)$ визначаються через відповідні обернені перетворення (20).Розглянемо $I_1(\beta, t)$. Дещо змінимо його представлення:

$$\begin{aligned} I_1(\beta, t) &= M[\chi(t) \exp\{i\beta \exp\{-\gamma_1 \int_0^t \chi(\tau) d\tau\}\}] = \\ &= M[\{\chi(t) - \frac{\gamma_1^{-1}}{(i\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\beta)^{j+1}}{(j+1)!} \frac{\partial}{\partial t} (\exp\{-\gamma_1 \int_0^t \chi(\tau) d\tau\})^{j+1} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} (\exp\{-\gamma_1 \int_0^t \chi(\tau) d\tau\})\}] \end{aligned}$$

Враховуючи що $M[\chi(t)] = p_\chi(t)$, та виконавши згортку суми, отримуємо:

$$\begin{aligned} (i\beta)\gamma_1 I_1(\beta, t) &= (i\beta)\gamma_1 p_\chi(t) - \frac{\partial}{\partial t} M[\exp\{i\beta \exp\{-\gamma_1 \int_0^t \chi(\tau) d\tau\}\}] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} M[\exp\{-\gamma_1 \int_0^t \chi(\tau) d\tau\}] \end{aligned} \quad (22)$$

Обернене перетворення (22), приводить до рівняння:

$$\begin{aligned} -\gamma_1 \frac{\partial}{\partial P} g_1(P, t) &= \gamma_1 p_\chi(t) \frac{\partial}{\partial P} \delta(P) - \\ &- \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \delta(P - \exp\{-\gamma_1 x_1\}) \bar{\rho}_1(x_1, t) dx_1 + \\ &+ \delta(P) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \exp\{-\gamma_1 x\} \bar{\rho}_1(x_1, t) dx_1, \quad P \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (23)$$

$\bar{\rho}_1(x_1, t)$ вже було встановлено та визначається (14). Тому, відповідні інтеграли в (23) обчислюються. Подальше інтегрування по змінній P , з урахуванням обмеження $P \in (0, 1]$, яке є наслідком представлення $P_k(t) = \exp(-\gamma_k t)$, $\gamma_k > 0$, і веде до аналітичного представлення $g_1(P_1, t)$.

Алгоритм пошуку $g_2(P, t)$ такий же та приводить до рівняння вигляду (22), з відповідними зміною у позначеннях, та заміною $\bar{\rho}_1(x, t)$ на функцію $\tilde{\rho}_2(x, t)$, яка відповідає (16), а $p_\chi(t)$ на $(1 - p_\chi(t))$. Після знаходження $g_1(P, t)$ та $g_2(P, t)$, встановлюється і аналітичне представлення $\rho(P, t)$ в (21).

Послідовність знаходження функцій $g_k(P, t)$, $\forall k$, за умови використання представлення (20), провадиться за алгоритмом використаного

у Прикладі 2. Якщо вдалось встановити щільність $\bar{\rho}_k(x_k, t)$ розподілу процесу $x_k(t)$, то приходимо до рівняння типу (23), яке тепер набуває вигляду:

$$-\gamma_k \frac{\partial}{\partial P} g_k(P, t) = \gamma_k p_{y_k}(t) \frac{\partial}{\partial P} \delta(P) - \\ - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \delta(P - \exp\{-\gamma_k x_k\}) \bar{\rho}_k(x_k, t) dx_k \\ + \delta(P) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \exp\{-\gamma_k x_k\} \bar{\rho}_k(x_k, t) dx_k, P \in (0, 1],$$

де

$$p_{y_k}(t) = p_{x_k}(t) \prod_{l=1}^{k-1} (1 - p_{x_l}), \quad p_{y_n}(t) = \prod_{l=1}^{n-1} (1 - p_{x_l}).$$

Після знаходження усіх $g_k(P, t)$, встановлюється аналітичний вигляд $\rho(P, t)$ за формулою (19).

Зауважимо, що пошук $\bar{\rho}_k(x_k, t)$ для $k > 2$ пов'язаний з громіздкістю рівнянь для його визначення, певними труднощами, які не вдалось нам подолати.

Висновки. Розглянуті приклади використання індикаторних випадкових процесів вказують на можливість застосування, у подальшому, подібних моделей для оптимізації характеристик технічних систем, що функціонують у умовах випадкових змін середовища. Відмітимо, що розглянуті приклади не обмежують прикладного їх застосування. Так випадковий розподіл часу знаходження системи у певному стані, наприклад, може трактуватись, як час затримки у порах, при русі частинки у пористому середовищі [1].

Список літератури:

1. Дубко В.О. Моделювання розповсюдження домішок у середовищі з центрами затримки за допомогою індикаторних функцій. *Аграрна наука та освіта в XXI столітті: проблеми, перспективи та інновації*: зб. Наукових праць № 9. Ніжин, 2018. С. 313–317.
2. Дубко В.А. Моделювання систем з випадковою структурою за допомогою індикаторних випадкових процесів. *Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія: технічні науки*. Том 31 (70) № 4 2020. С. 81–86. DOI: <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2020.4/11>
3. Gikhman I.I., and Skorokhod A.V. Introduction to the Theory of Random Processes, *Philadelphia, W. B. Saunders*, 1969. 354 P.
4. Кас, М. Probability and Related Topics in Physical Sciences, *Interscience Publ.: London, UK*, 1959. 266 p.
5. Orsingher E., Ratanov N. Random motions in inhomogeneous media *Theor. Probability and Math. Statist.* Vip. 76, 2007 No. 76, 2008, Pp.141–153. S 0094-9000(08)00738-2.
6. Özekici, S., Soyer, R. Reliability Modeling and Analysis in Random Environments. In: *An Expository Perspective. International Series in Operations Research & Management Science*, Springer, Boston, vol 67. 2004 Pp. 249–273. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9021-1_13

Doobko V.O. APPLICATION OF INDICATOR PROCESSES IN MODELING AND RESEARCH OF INDICATORS OF STOCHASTIC SYSTEMS WITH VARIABLE STRUCTURE

This work is an extension and continuation of our research related to the use of random indicator processes $\chi_l(t), l = \overline{1, (n-1)}$, $\chi_l(t) \in \{0, 1\}$ in modeling dynamic systems with a jump-like structure. The basis is the possibility of decomposing an arbitrary component process into “orthogonal” components using incompatible processes formed according to a certain combination algorithm. The effectiveness of using indicator processes in modeling phenomena that can be interpreted as their evolution in a random environment, the characteristics of which change by jumps at random moments of time, was demonstrated. The law of these changes was consistent with Poisson’s law. For the model of the two-level state of the system, a connection was established with the Katz model, which was used to describe the one-dimensional process of particle wandering with a constant velocity in magnitude, but with a change in the direction of its motion at random moments of time. The studied models are built on the basis of stochastic Ito equations with jump-like changes in coefficients, equations for characteristic functions were constructed and their solution was found. Based on the main results of these works, this article considers in more detail the options for representing indicator random processes, focusing on processes associated with random time intervals of the system being in certain possible states, the distribution of system indicators depending on these intervals. As an example of such an indicator, the reliability of a multi-element system is chosen, which can be in a certain k -th state, for which an analytical expression of the change in its reliability depending on the time of operation is known at fixed indicators of the k -th state of the “external environment”. In such an interpretation, the reliability of the system is already a random function of time. For the two-level case, explicit expressions for the density distribution of random time and reliability are established, their

connection with classical solutions of the telegraph equation. The features of the description of multi-level, multi-element systems are indicated, and ways of finding distributions of characteristics similar to those considered in the work for a system with two possible states are indicated.

Key words: *indicator processes, external environment, random time distribution, system reliability, Poisson processes, telegraph equation.*

Дата надходження статті: 04.09.2025

Дата прийняття статті: 12.09.2025

Опубліковано: 27.10.2025